

SYSTÈMES LP1 - LP2 **- RÉPONSE INDICIELLE -**

1 -Contrôler - automatiser - modéliser.....	2
2 -Réponse temporelle d'un système linéaire.....	3
2.1 -Les différents types de consignes.....	3
2.2 -Régime transitoire / régime permanent.....	3
2.3 -Évaluation des performances d'un système.....	4
3 -Réponse indicielle d'un système LP1.....	5
3.1 -Exemple circuit R+C.....	5
3.2 -Équations, paramètres, solution, chronogramme d'un LP1.....	5
3.3 -Identification d'un LP1 et mesure de ses Grandeurs caractéristiques.....	7
3.4 -Performances d'un système LP1.....	8
3.5 -LP1 à connaître : RC RL moteur Chauffage.....	8
4 -Réponse indicielle d'un système LP2.....	9
4.1 -Exemple circuit L+R+C.....	9
4.2 -Équations, paramètres, chronogrammes d'un LP2.....	9
4.2.1 -Cas $m < 1$ - régime Pseudo périodique	10
4.2.2 -Cas $m > 1$ - régime apériodique.....	10
4.2.3 -Cas $m = 1$ - régime critique.....	10
4.3 -Identification d'un LP2 et mesure de ses Grandeurs caractéristiques.....	11
4.4 -Performances d'un système LP2.....	12
4.5 -Circuits RLC.....	13
Circuit résonnant série L+R+C.....	13
Circuit résonnant parallèle.....	13
Circuit L+C//R.....	14



1 - CONTRÔLER – AUTOMATISER – MODÉLISER.

On cherche à automatiser un système : on veut le faire fonctionner sans la présence d'une personne humaine.

Il faut donc que l'alimentation du système puisse le contrôler : faire en sorte que le système fasse ce qu'on lui demande de faire. Par exemple :

- contrôler le courant fourni par une alimentation,
- contrôler le courant, le couple ou la vitesse d'un moteur,
- contrôler la température d'un système de chauffage / refroidissement,
- contrôler la pression ou le débit d'une installation hydraulique.

En général la commande de ces systèmes se fait par une tension de consigne (+/-10V).

Nous nous limiterons à des systèmes comportant une seule entrée et une seule sortie.

De plus ces systèmes seront supposés linéaires : toute variation de la grandeur d'entrée entraînera une variation proportionnelle de la sortie.

Les systèmes que nous étudierons seront de type « passe bas » (« Low Pass » - LP) d'ordre 1 ou d'ordre 2.

Pour contrôler un système, il faut d'abord le modéliser. Avec ce modèle on sera capable de prévoir comment il va se comporter.

Modéliser un système consiste à connaître les équations liant l'entrée et la sortie.

Ces équations sont toujours du même type : ce sont des équations différentielles ou des fonctions de transfert.

Ces équations seront toujours écrites de la même façon appelée « forme canonique ».

La différence entre 2 systèmes ayant le même type d'équation sera les paramètres du système.

La modélisation doit donc permettre :

- de connaître le type d'équation,
- de connaître les paramètres du système.

Pour modéliser un système de manière expérimentale, on peut

exploiter sa réponse harmonique (diagramme de Bode)

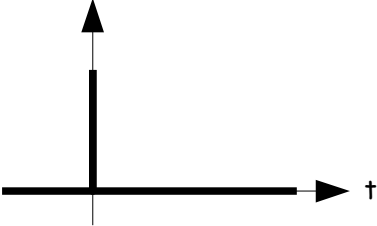
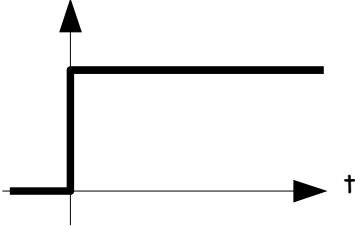
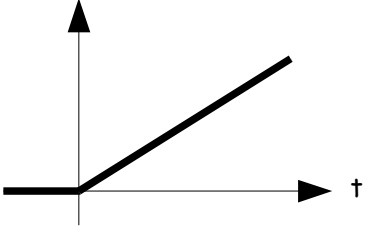
exploiter sa réponse temporelle.

2 - RÉPONSE TEMPORELLE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE.

La réponse temporelle est obtenue en suivant l'évolution en fonction du temps de la sortie lorsqu'on applique une consigne calibrée en entrée.

2.1 - LES DIFFÉRENTS TYPES DE CONSIGNES.

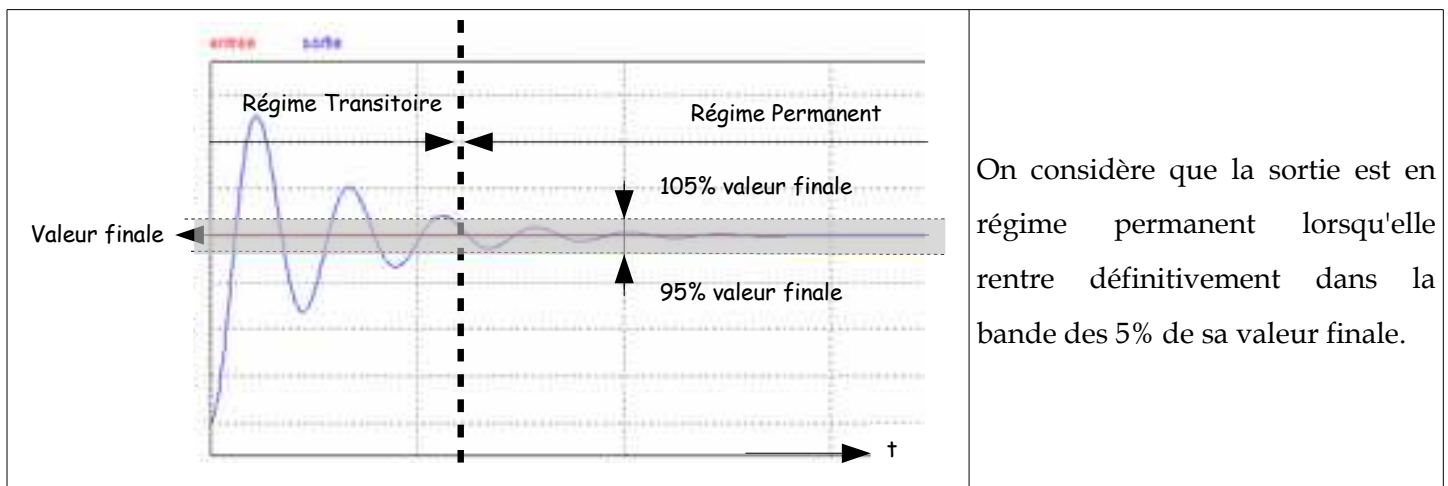
On distingue 3 types de consignes :

Impulsion  « réponse impulsionnelle »	Échelon  « réponse indicielle »	Rampe 
---	--	--

2.2 - RÉGIME TRANSITOIRE / RÉGIME PERMANENT.

Lorsqu'on observe l'évolution de la sortie, on distingue 2 régimes de fonctionnement :

- le régime transitoire : phase de « mise en route »
- le régime permanent : le signal de sortie est stabilisé.





2.3 - ÉVALUATION DES PERFORMANCES D'UN SYSTÈME.

Pour savoir si la réponse d'un système est satisfaisante, on définit 3 critères de performance :

- La précision : la sortie suit elle l'ordre donné ?

La mesure de précision se fait en régime permanent. Ce critère est absolu.

- La rapidité : combien de temps met la sortie à suivre l'ordre donné ?

Ce critère est évalué en mesurant la durée du régime transitoire. Ce critère est relatif.

- La stabilité : comment évolue la sortie ?

C'est un critère relatif.

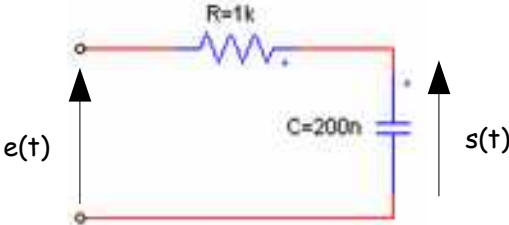
Définitions de « stabilité » d'après le « petit Robert » :

- « propriété d'un corps de revenir à sa position d'équilibre et de reprendre son mouvement après une modification passagère »,
- « propriété d'un système qui demeure dans un état d'équilibre ou de régime permanent »,
- « aptitude d'un système automatique à atteindre sa position d'équilibre avec un minimum d'oscillations ».

Si les performances ne sont pas satisfaisantes (si elles ne correspondent pas au cahier des charges), on décidera de mettre en place un asservissement.

3 - RÉPONSE INDICIELLE D'UN SYSTÈME LP1.

3.1 - EXEMPLE CIRCUIT R+C.

	La tension d'entrée est un échelon d'amplitude E : ➤ pour $t < 0 : e(t) = 0$ ➤ pour $t \geq 0 : e(t) = E$ La sortie est la tension aux bornes du condensateur notée $s(t)$. On suppose que le condensateur était au départ déchargé : $s(t=0) = 0$.
---	---

Loi des nœuds : 0

Loi des mailles : $e = u_R + s$

$$u_R = R \times i$$

Loi d'Ohm : $i(t) = C \frac{ds}{dt} \Rightarrow e = R \times \left(C \frac{ds}{dt} \right) + s$

d'où l'équation liant la sortie $s(t)$ à l'entrée e pour $t > 0$: $RC \frac{ds}{dt} + s = E$

« équation
différentielle
du 1er ordre
à coefficients constants

à second membre constant »

car il y a un signe « = »

car il y a la fonction $s(t)$ et ses dérivées par rapport au temps

car il n'y a que la dérivée première $s'(t) = ds/dt$

car le coefficient devant $s(t)$ est 1 - constant,

et le coefficient devant ds/dt est RC - constant

de l'autre coté du signe « = » la fonction est $e(t) = E = cte$

3.2 - ÉQUATIONS, PARAMÈTRES, SOLUTION, CHRONOGRAMME D'UN LP1.

L'échelon d'entrée est d'amplitude E .

La condition initiale est $s(t=0) = S_0$.

Tout système LP1 vérifie les équations suivantes écrites sous *forme canonique* :

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = A_0 \times E$$

$$s(0) = S_0$$

Les paramètres de ce système sont :

- le gain statique : A_0
- la constante de temps : τ .

La solution de ces 2 équations (équation différentielle ET condition initiale) est :

$$s(t) = A_0 E \times (1 - e^{-t/\tau}) + S_0 \times e^{-t/\tau}$$

La valeur finale atteinte par ce système est $S_\infty = A_0 E$.



C'est un système passe bas car le second membre est proportionnel à la grandeur d'entrée.

C'est un système d'ordre 1 car l'équation différentielle est d'ordre 1.

L'équation différentielle est écrite sous forme canonique car le coefficient devant $s(t)$ est 1.

L'allure de la réponse à un échelon d'un système LP1 est représentée figure 1.

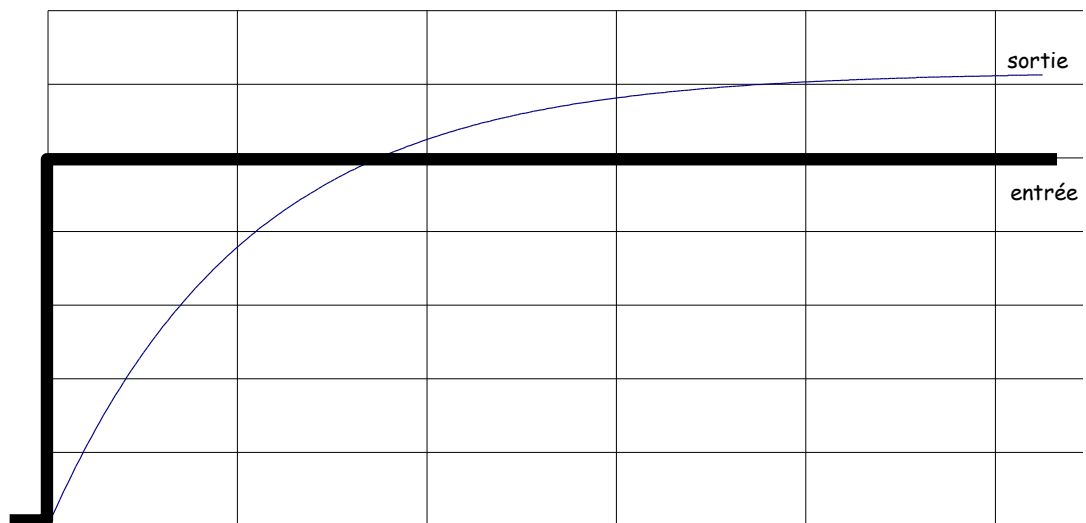


figure 1: réponse d'un LP1 à un échelon >0

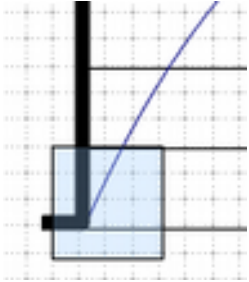
Le temps t_x mis pour atteindre la valeur S_x a pour expression :

$$t_x = -\tau \ln \left(\frac{S_\infty - S_x}{S_\infty - S_0} \right)$$

À l'instant $t_\tau = \tau$ on a $S_\tau - S_0 = 0.63 \times (S_\infty - S_0)$:

au bout du temps $t = \tau$, la sortie d'un système LP1 a atteint 63% de sa variation totale.

3.3 - IDENTIFICATION D'UN LP1 ET MESURE DE SES GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES.



Pour montrer que la réponse indicielle est bien celle d'un LP1, on vérifie que

- il n'y a pas de dépassement
- la tangente à l'origine est oblique.

Pour modéliser un LP1, sur la réponse à un échelon d'un système LP1, on mesure les grandeurs caractéristiques suivantes : la valeur finale et un temps de réponse (figure 2).

- La valeur finale S_{∞} est la valeur prise par la sortie lorsque $t \rightarrow \infty$.
C'est le gain statique qui fixe la valeur finale : $S_{\infty} = A_0 \times E$.
- Le temps de montée à x% Δt_x est le temps mis par la sortie pour passer de $x\%$ à $1 - x\%$ de la variation totale (voir figure 2).

En général on mesure le temps de montée à 10%.

C'est la constante de temps fixe la rapidité du système : $\Delta t_x = \tau \times \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$.

10 %	5%	1%
$\Delta t_{10} = \tau \times \ln(9) \simeq 2.2 \tau$	$\Delta t_5 = \tau \times \ln(19) \simeq 3 \tau$	$\Delta t_1 = \tau \times \ln(99) \simeq 5 \tau$

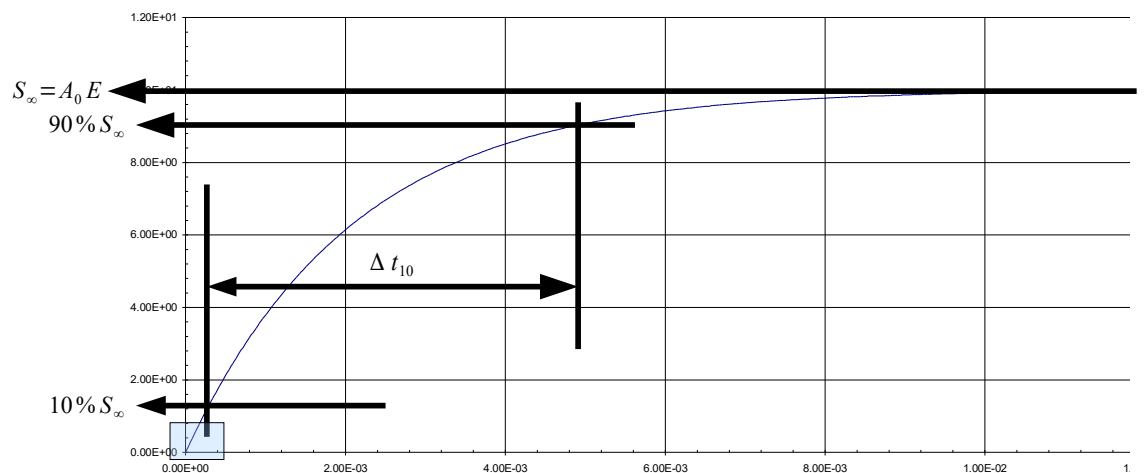


figure 2: Mesure des grandeurs caractéristiques réponse indicielle LP1

Pour mesurer très rapidement la constante de temps, on peut mesurer le temps Δt que met la sortie à varier de 63 %. Ce temps est $\Delta t = \tau$.



3.4 - PERFORMANCES D'UN SYSTÈME LP1.

La précision dépend de son gain statique.

La rapidité dépend de sa constante de temps.

Le régime transitoire d'un système LP1 dure 3τ (temps de montée à 5%)

La sortie d'un système LP1 n'évolue quasiment plus 5τ après le changement de l'entrée (temps de montée à 1%).

À chaque changement de l'entrée, la sortie d'un système LP1 met 5τ à se stabiliser.

Un système LP1 est un système stable.

3.5 - LP1 À CONNAÎTRE : RC RL MOTEUR CHAUFFAGE.

La tension aux bornes du condensateur d'un circuit R+C évolue comme un système d'ordre 1 de gain statique 1 et de constante de temps $\tau = RC$.

Le courant circulant dans un circuit L+R évolue comme un système d'ordre 1 de gain statique $A_0 = 1/R$ et de constante de temps $\tau = L/R$.

Cette constante est appelée la « constante de temps électrique » et se retrouve dans toutes les machines électriques (transformateurs et machines tournantes), elle fixe la rapidité de variation du courant lors d'une variation de la tension d'alimentation.

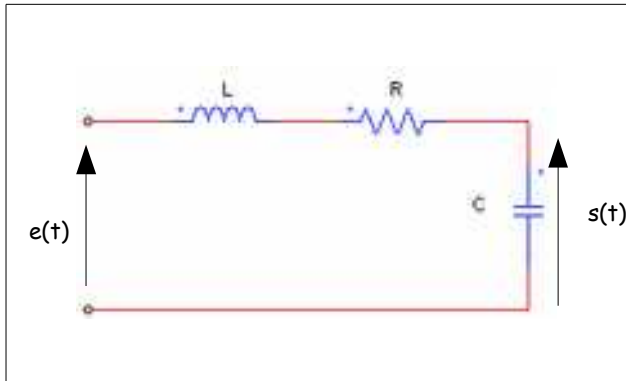
La vitesse d'un système mécanique tournant lors d'un démarrage ou d'un arrêt à couple constant évolue comme un système d'ordre 1 de constante de temps $\tau_m = J/f$ où J est l'inertie de toutes les pièces en mouvement ramenée sur l'arbre moteur et f le coefficient de frottement visqueux.

Cette constante de temps est appelée la « constante de temps mécanique » et intervient dans la variation de vitesse des moteurs électriques.

La température d'un élément chauffé évolue comme un système d'ordre 1 de constante de temps thermique $\tau_{th} = R_{th} C_{th}$ où C_{th} est la capacité thermique de l'élément à chauffer (exprimée en Joule/Kelvin) et R_{th} est la résistance thermique de l'enveloppe de l'élément (exprimée en Kelvin/Watt).

4 - RÉPONSE INDICIELLE D'UN SYSTÈME LP2.

4.1 - EXEMPLE CIRCUIT L+R+C.



La tension d'entrée est un échelon d'amplitude E :

- pour $t < 0 : e(t) = 0$
- pour $t \geq 0 : e(t) = E$

La sortie est la tension aux bornes du condensateur.

On suppose que le circuit était au départ au repos :

- condensateur déchargé : $s(t=0) = 0$.
- bobine déchargée : $i(t=0) = 0$

Loi des nœuds : 0

Loi des mailles : $e = u_L + u_R + s$

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$e = L \left(\frac{di}{dt} \right) + R i + s$$

Loi d'Ohm : $u_R = R \times i$ $\Rightarrow$ $e = L \frac{d(C \frac{ds}{dt})}{dt} + R (C \frac{ds}{dt}) + s$

$$i(t) = C \frac{ds}{dt}$$

d'où l'équation liant la sortie $s(t)$ à l'entrée e pour $t > 0$: $LC \frac{d^2 s}{dt^2} + RC \frac{ds}{dt} + s = E$

« équation
différentielle

du 2ème ordre

car il y a la dérivée seconde

$$s''(t) = (s'(t))' = d(ds/dt)/dt = d^2 s / dt^2$$

à coefficients constants

à second membre constant »

4.2 - ÉQUATIONS, PARAMÈTRES, CHRONOGRAMMES D'UN LP2.

L'échelon d'entrée est d'amplitude E .

On suppose que le système est initialement au repos : $s(t=0) = 0$ et $\left(\frac{ds}{dt} \right)_{t=0} = 0$.

Tout système LP2 initialement au repos vérifie les équations suivantes écrites sous *forme canonique* :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s}{dt^2} + 2 \frac{m}{\omega_0} \frac{ds}{dt} + s = A_0 \times E$$

$$s(0) = 0$$

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)_{t=0} = 0$$

Les paramètres de ce système sont :

- le gain statique : A_0
- la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ - ω_0 est la pulsation propre
- le coefficient d'amortissement m .

La solution de ces 3 équations (équation différentielle ET les 2 conditions initiales) dépend de la valeur du coefficient d'amortissement.

4.2.1 – CAS $m < 1$ – RÉGIME PSEUDO PÉRIODIQUE .

On parle de « régime pseudo-périodique » car pendant le régime transitoire la sortie présente des oscillations qui s'atténuent ; il y a en plus un dépassement (figure 3).

Plus le coefficient d'amortissement est faible, plus il y a d'oscillations et plus le dépassement est fort.

La pulsation des oscillations est $\omega_p = \omega_0 \times \sqrt{1 - m^2}$.

Le dépassement a pour expression : $D = \frac{S_{Max} - S_{\infty}}{S_{\infty}} = \exp\left(\frac{-m\pi}{\sqrt{1 - m^2}}\right)$

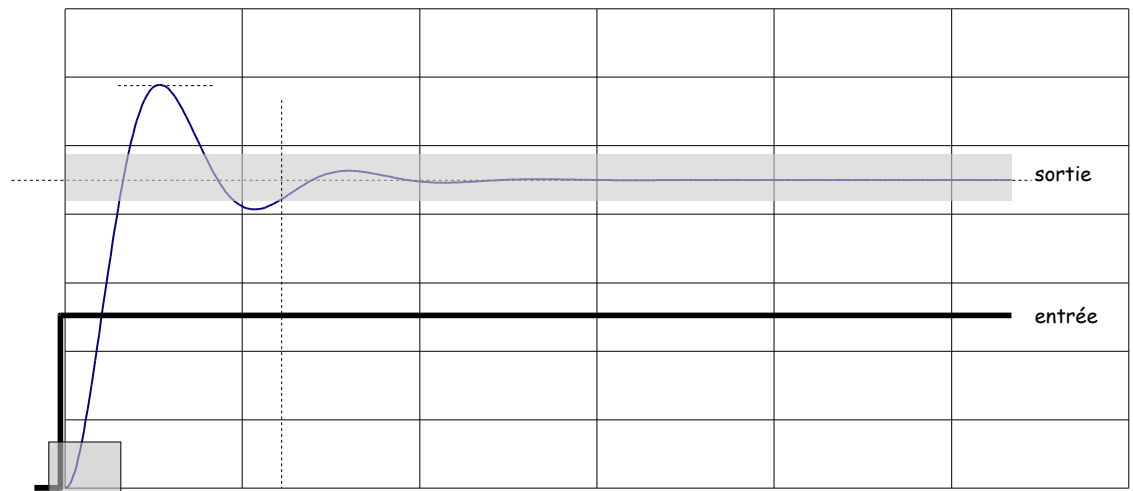


figure 3: Réponse indicielle LP2 $m < 1$ - régime pseudo périodique

4.2.2 – CAS $m > 1$ – RÉGIME APÉRIODIQUE.

Il n'y a plus d'oscillation ni de dépassement. On parle de « régime apériodique ».

L'évolution de la sortie ressemble à celle d'un LP1 - MAIS le démarrage est différent.

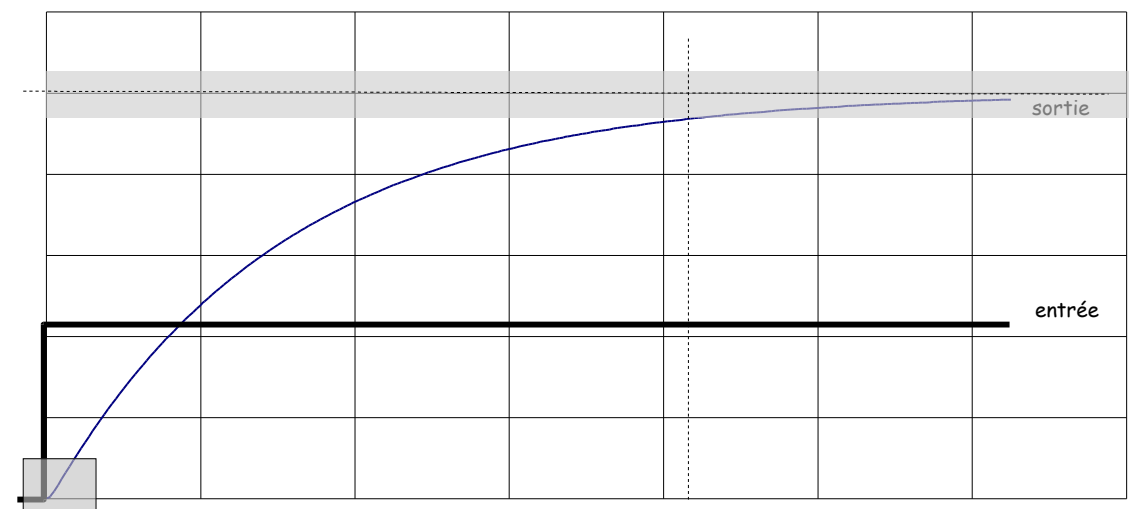
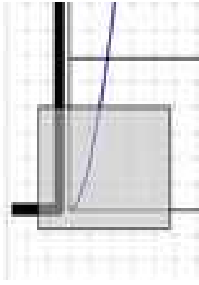


figure 4: Réponse indicielle LP2 $m > 1$ - régime apériodique

4.2.3 – CAS $m = 1$ – RÉGIME CRITIQUE.

La sortie ressemble au cas $m > 1$, on est en « régime critique ».

4.3 - IDENTIFICATION D'UN LP2 ET MESURE DE SES GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES.



Pour montrer que la réponse indicielle est bien celle d'un LP2, on vérifie que

➤ que la tangente à l'origine est horizontale.

S'il y a un dépassement, on est sûr que c'est un LP2.

Pour trouver les paramètres du LP2, on mesure les grandeurs caractéristiques suivantes sur la réponse indicielle : la valeur finale, le dépassement et le temps de réponse à 5% (figure 5).

La *valeur finale* S_{∞} est la valeur prise par la sortie lorsque $t \rightarrow \infty$.

C'est le gain statique qui fixe la valeur finale : $S_{\infty} = A_0 \times E$.

Le dépassement mesure l'écart en % entre la valeur max et la valeur finale :

$$D = \frac{S_{\max} - S_{\infty}}{S_{\infty}} \text{ exprimé en \%}.$$

Le dépassement maximal est pour $m=0$, $D=100\% \Leftrightarrow S_{\max} = S_{\infty}$.

Il n'y a un dépassement que si $m < 1$.

La valeur du dépassement ne dépend que du coefficient d'amortissement m (voir 4.2.1).

Une fois le dépassement mesuré, on lit la valeur de m sur l'abaque du dépassement $D(m)$.

Le temps de réponse à 5% t_{r-5} est le temps mis par la sortie à rentrer définitivement dans la bande des 5%.

La valeur du temps de réponse dépend du coefficient d'amortissement m et de la période propre T_0 .

Une fois le temps de réponse mesuré, sur l'abaque du temps de réponse, pour la valeur de m déterminée, on lit la valeur du rapport t_{r-5}/ω_0 pour trouver la valeur de la pulsation propre.

Les abaques de dépassement $D(m)$ et de temps de réponse $t_{r-5} \times \omega_0(m)$ sont dans le document « modélisation LP1 LP2 ».

On ne peut modéliser correctement que les systèmes LP2 avec $m < 1$.

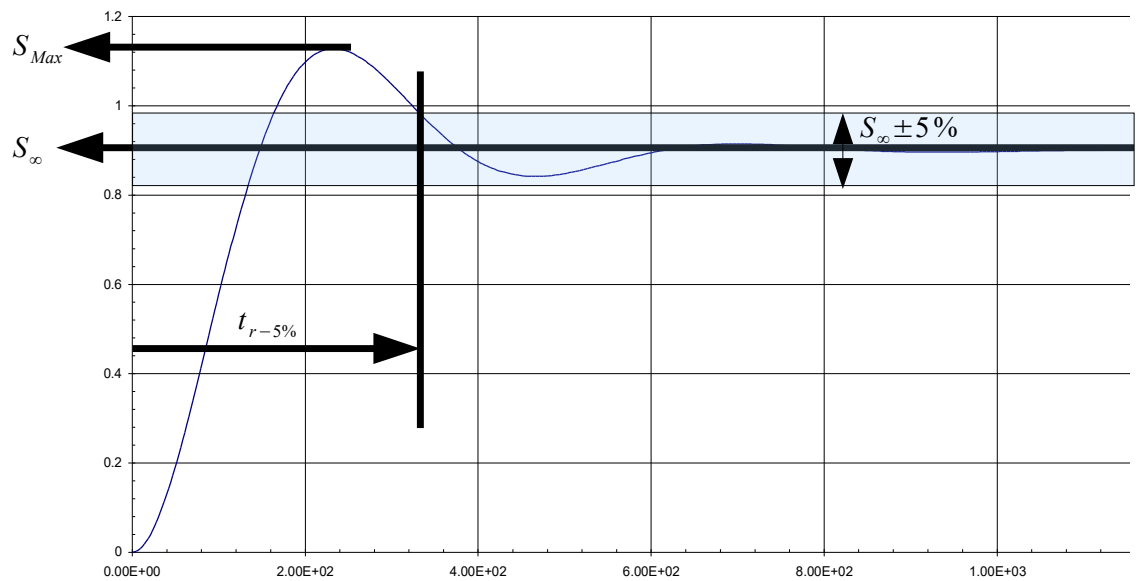


figure 5: Mesure des grandeurs caractéristiques réponse indicielle LP2 - $m < 1$

Pour les systèmes LP2 sans dépassement ($m > 1$), on utilise des modélisations approchées (méthodes de Broïda, de Ziegler-Nichols etc).

4.4 - PERFORMANCES D'UN SYSTÈME LP2.

La précision dépend de son gain statique.

La rapidité dépend de son temps de réponse à 5%. Elle dépend donc de son coefficient d'amortissement et de sa période propre.

Sur l'abaque du temps de réponse, on voit que :

- Le système LP2 ayant le temps de réponse le plus court a un coefficient d'amortissement $m = 1/\sqrt{2}$ (mais il y a donc un dépassement).

Pour cette valeur de m on a $t_{r-5} \times \omega_0 \simeq 3$.

- Le système LP2 *sans dépassement* ayant le temps de réponse le plus court a un coefficient d'amortissement $m = 1$:

pour cette valeur de m on a $t_{r-5} \times \omega_0 \simeq 5$

La stabilité dépend uniquement du coefficient d'amortissement.

Plus m est faible, plus le dépassement est important.

Pour $m > 1$, il n'y a pas de dépassement.

4.5 - CIRCUITS RLC.

Les circuits comportant des résistances, des inductances ET des condensateurs forment des systèmes LP2 : si on n'y prend pas garde, il peut y avoir un phénomène de résonance ($m < 1$ - sortie plus importante que l'entrée).

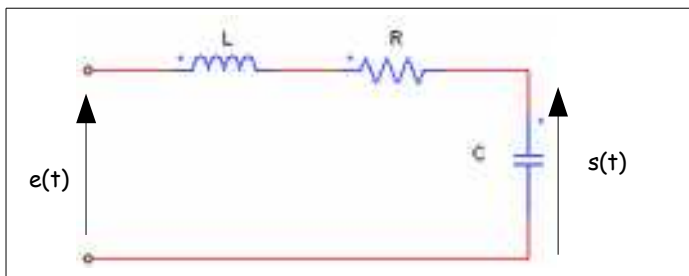
On se retrouve dans cette situation dans :

des installations électriques (inductives) où on compense le réactif,
sur le bus continu des variateurs de vitesse (filtrage L+C),
dans les bras de transistor IGBT.

La pulsation propre a pour expression $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Le coefficient d'amortissement dépend de L et C, mais en plus de R – plus R augmente, plus l'amortissement augmente.

CIRCUIT RÉSONNANT SÉRIE L+R+C.



La tension d'entrée est un échelon d'amplitude E .

La sortie est la tension aux bornes du condensateur.

On suppose que le circuit était au départ au repos :

- condensateur déchargé : $s(t=0)=0$.
- bobine déchargée : $i(t=0)=0$

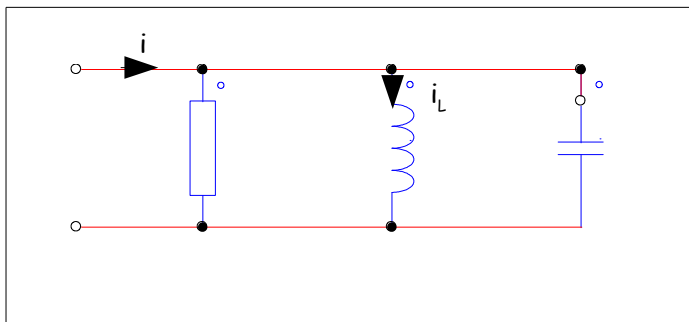
$$\text{Équation : } LC \frac{d^2 s}{dt^2} + RC \frac{ds}{dt} + s = E$$

paramètres : gain statique $A_0 = 1$

pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

coefficient d'amortissement : $m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$

CIRCUIT RÉSONNANT PARALLÈLE.



L'entrée est le courant alimentant l'association i .

La sortie est le courant dans l'inductance i_L .

On suppose que le circuit était au départ au repos :

- condensateur déchargé : $s(t=0)=0$.
- bobine déchargée : $i(t=0)=0$

$$\text{Équation : } LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = I$$



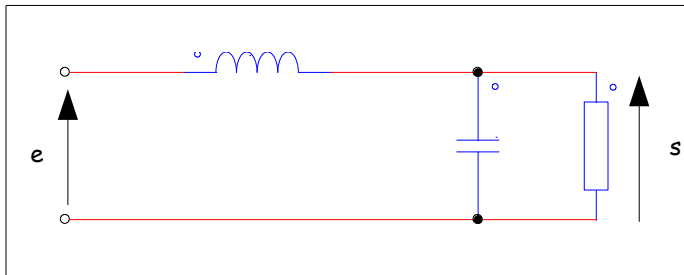
paramètres : gain statique $A_0=1$

pulsation propre $\omega_0=1/\sqrt{LC}$

coefficient d'amortissement : $m=\frac{1}{2}R\sqrt{\frac{L}{C}}$

CIRCUIT L+C//R.

On retrouve cette structure à la sortie des redresseurs à diode pour rendre la tension la plus continue possible tout en limitant les harmoniques du courant réseau.



L'entrée est la tension d'alimentation e .

La sortie est la tension aux bornes de C//R s .

On suppose que le circuit était au départ au repos :

- condensateur déchargé : $s(t=0)=0$.
- bobine déchargée : $i(t=0)=0$

Équation : $LC \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{ds}{dt} + s = E$

paramètres : gain statique $A_0=1$

pulsation propre $\omega_0=1/\sqrt{LC}$

coefficient d'amortissement : $m=\frac{1}{2}R\sqrt{\frac{L}{C}}$