- HARMONIQUES-

1 - Décomposition / recomposition d'un signal périodique.

1.1 - Composante continue et ondulation.

Tout signal périodique $s(t)$ peut se décomposer en une composante continue de valeur S_{DC} et une ondulation $s_{\sim}(t)$: $s(t)=S_{DC}+s_{\sim}(t)$.

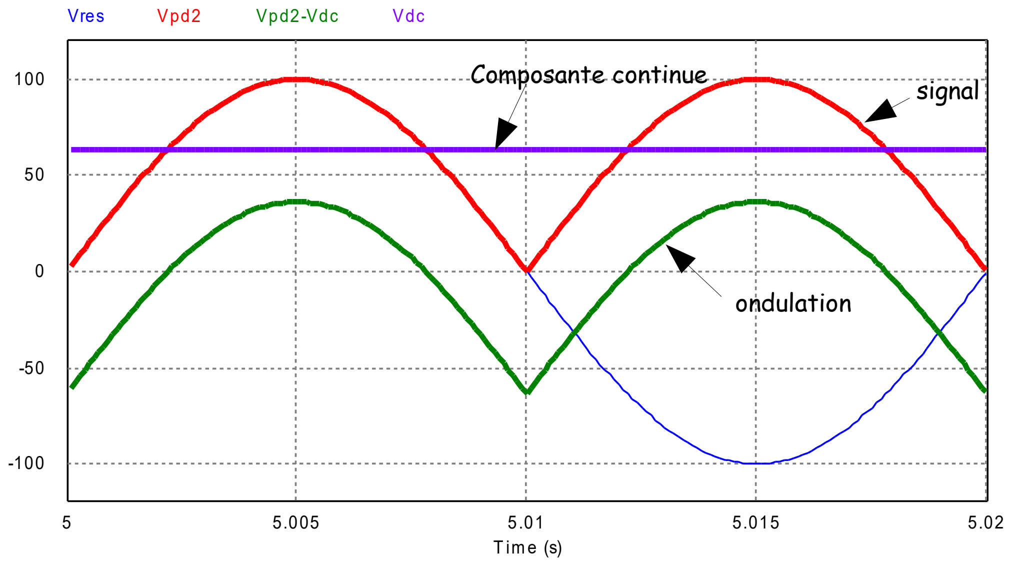


figure 1: tension réseau, tension en sortie de PD2, composante continue et ondulation de cette tension redressée

1.2 - Décomposition de l'ondulation.

L'ondulation d'un signal périodique de période T (fréquence f) est constituée d'une infinité de sinusoïdes de fréquences $n \times f$.

Exemple: : décomposition de la tension en sortie d'un Pont PD2

Lorsque la tension de sortie d'un pont PD2 est filtrée par un filtre qui ne laisse passer qu'une seule fréquence (filtre sélectif), on observe successivement les tensions suivantes :

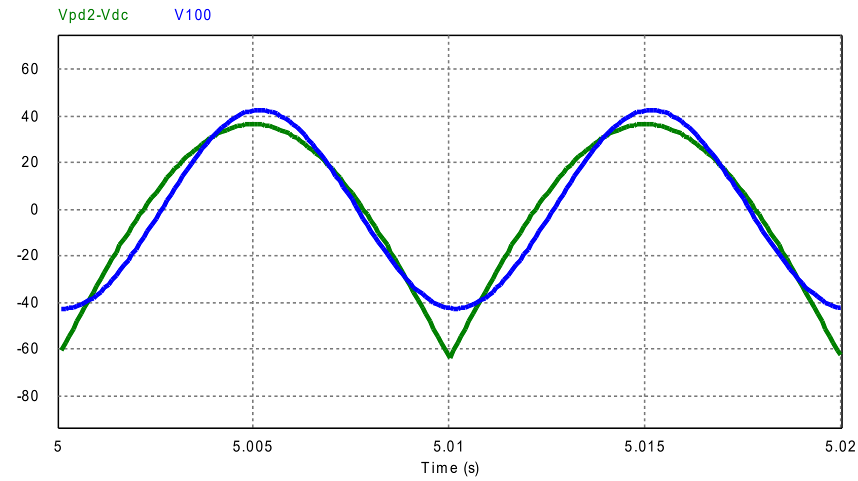


figure 2: ondulation et première sinusoïde

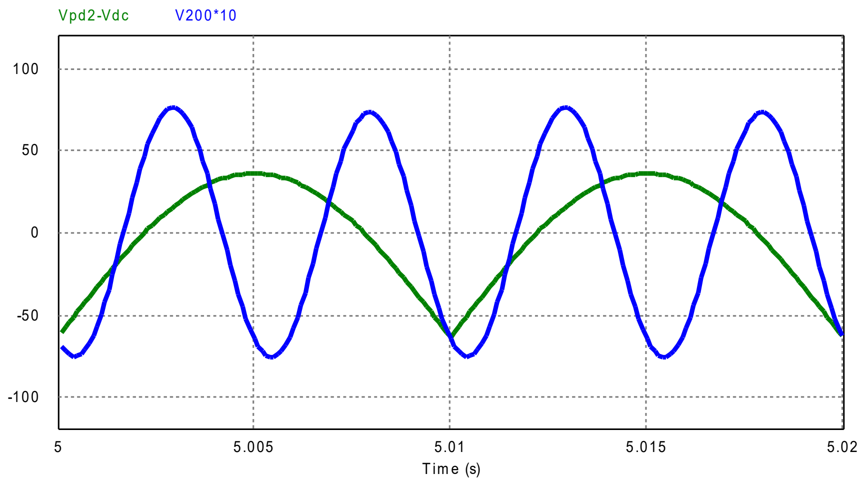


figure 3: ondulation et seconde sinusoïde amplifiée

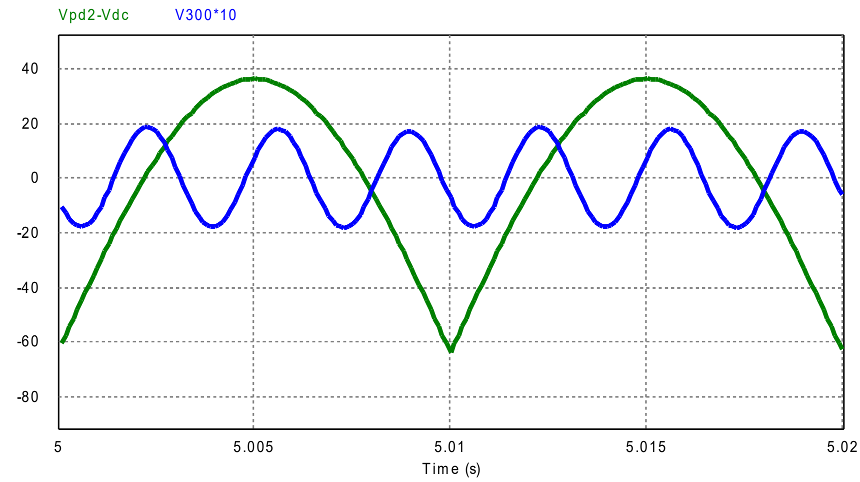
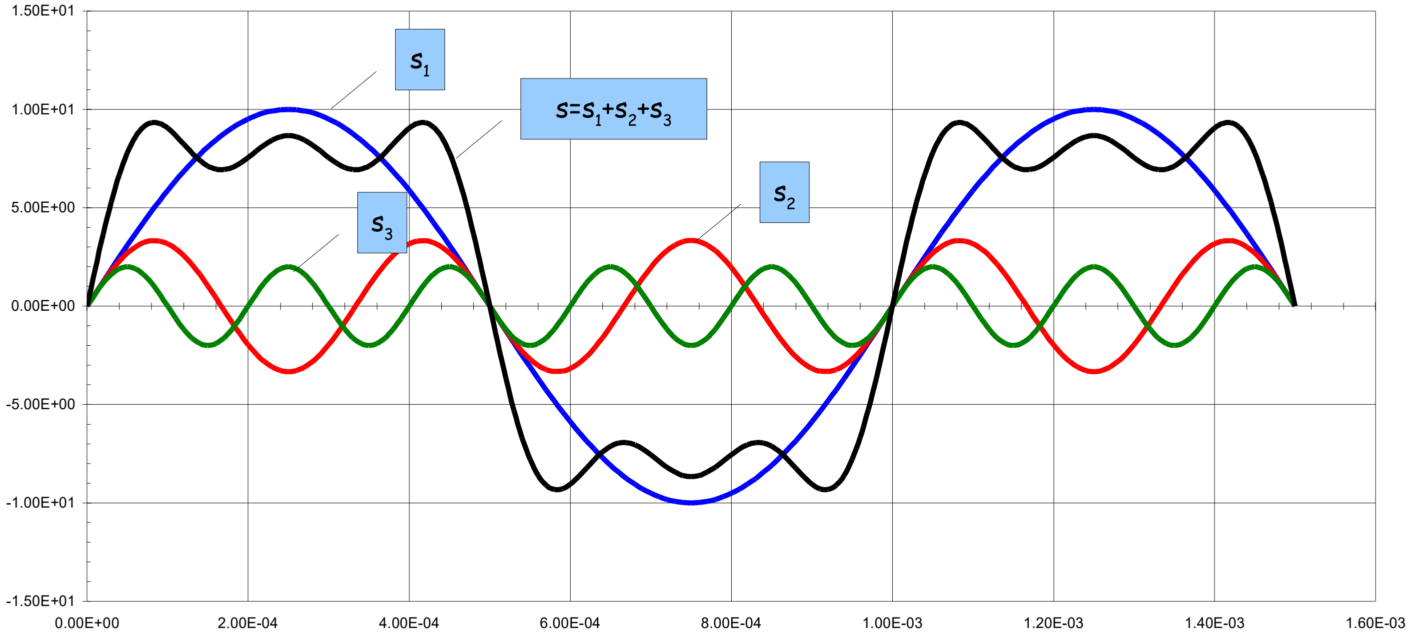


figure 4: ondulation et troisième sinusoïde amplifiée

1.3 - Recomposition d'un signal périodique

Lorsqu'on ajoute plusieurs sinusoïdes de fréquences multiples (n×f, n entier), on obtient un signal périodique de fréquence f.

EXEMPLE : ADDITION DE 3 SINUSOÏDES DE FRÉQUENCE f_0 , $3\times f_0$ *ET* $5\times f_0$



Lorsqu'on ajoute ces 3 sinusoïdes de fréquences et d'amplitudes bien précises, on fabrique un signal d'allure rectangulaire.

2 - Développement en série de Fourier.

2.1 - Enoncé.

L'<u>*ondulation*</u> d'un signal périodique s(t) de période T (fréquence f) est composé d'une infinité de sinusoïdes et cosinusoïdes de fréquence n×f (n entier ≥0).

2.1.1 - Écriture sous forme générique.

$$s(t)=S_{DC}+\sum_{n\geq 1}\left(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\right)$$ Série de Fourier - générique

2.1.2 - Écriture sous forme développée.

$$\begin{aligned} s=S_{DC}&+a_1\cos(1\omega t)+b_1\sin(1\omega t)\\ &+a_2\cos(2\omega t)+b_2\sin(2\omega t)\\ &+a_3\cos(3\omega t)+b_3\sin(3\omega t)\\ &+\ldots \end{aligned}$$ Série de Fourier - développée

2.2 - Vocabulaire : Harmonique, amplitude, rang, fondamental ...

harmonique

Chaque sinusoïde ou cosinusoïde contenues dans l'ondulation est un « harmonique » du signal s.

Rang d'un harmonique

L'harmonique de fréquence $n\times f$ est « l'harmonique de rang n »,

- l'indice n des coefficients a_n ou b_n est le rang de l'harmonique,
- on va distinguer

  les harmoniques de rang pair (coefficients $a_2, b_2,\ a_4, b_4\ \ldots a_{2p}, b_{2p}$) rang 2p

  les harmoniques de rang impair ($a_1, b_1,\ a_3, b_3,\ \ldots a_{2p+1}, b_{2p+1}$) rang 2p+1

Amplitude d'un harmonique

a_n et b_n sont les amplitudes des harmoniques de rang n,

- en mathématiques a_n et b_n sont appelés « coefficients de rang n » de la série de Fourier du signal s(t),
- ces coefficients sont des nombres réels >0 ou <0.

fondamental

L'harmonique de rang 1 (de fréquence 1×f) est appelé « fondamental ».

La valeur moyenne peut être appelée « harmonique de rang 0 » (coefficient $a_0/2$).

Harmonique significatif

Les harmoniques dont les amplitudes les plus importantes après le fondamental sont appelés « harmoniques significatifs ».

Le développement de $s(t)$ en série de Fourier est en fait celui de son ondulation $s_{\sim}(t)$.

2.3 - Transformée de Fourier – calcul des coefficients.

TF

Le résultat du calcul des coefficients a_n et b_n de la série de Fourier d'un signal périodique s(t) s'appelle « la transformée de Fourier de s ».

Les coefficients sont calculés à partir des définitions suivantes :

$S_{DC}=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\,dt$	$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\times\cos(n\omega t)\,dt$ $n\geq 1$	$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\times\sin(n\omega t)\,dt$ $n\geq 1$

2.4 - Détermination du Rang des harmoniques.

En fonction de la parité du signal.

Signal pair
Coeff a

Si l'ondulation du signal est paire ($s_{\sim}(-t)=s_{\sim}(t)$) alors

les coefficients b_n sont tous nuls

⇒ il ne reste que les termes $a_n\times\cos(n\omega t)$.

Signal impair
Coeff b

Si l'ondulation du signal est impaire ($s_{\sim}(-t)=-s_{\sim}(t)$) alors

les coefficients a_n sont tous nuls

⇒ il ne reste que les termes $b_n\times\sin(n\omega t)$.

Signaux alternatifs.

On appelle signal alternatif un signal présentant une symétrie de glissement : $s(t+T/2)=-s(t)$

- La partie positive d’un signal alternatif est l’opposée de sa partie négative.
- La valeur moyenne d’un signal alternatif est nulle.

Signal alternatif
Rang impair

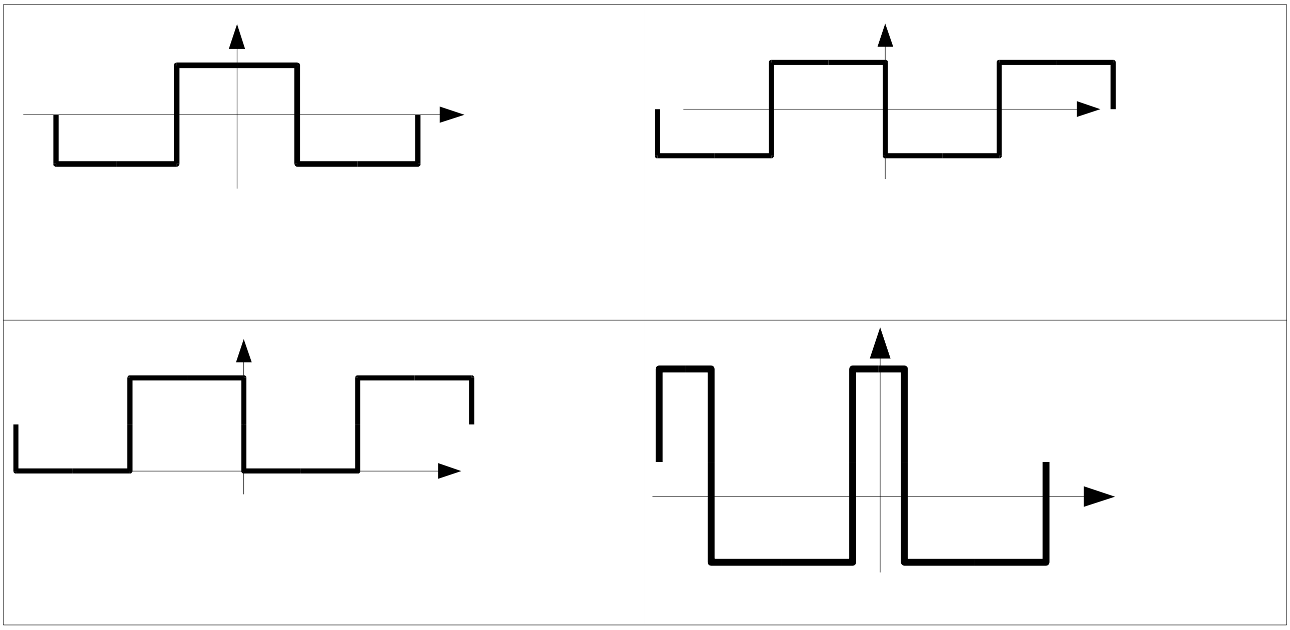
Si l’ondulation d’un signal est alternative, alors

ce signal ne contient que des harmoniques de ***rang*** impair

les harmoniques de rang pair sont nuls : $a_{2p}=b_{2p}=0$.

Exemples. :

Déterminer la parité des signaux suivants et de leur ondulation,
préciser si ces signaux ou leur ondulation est alternative,
déduire de ces réponses les harmoniques contenues dans ce signal (type et rang).



2.5 - Série de Fourier et Harmoniques en électrotechnique.

- Tous les signaux que nous rencontreront seront pair ou impair.
- Quasiment tous seront alternatifs.

- En sciences appliquées, on ne vous demandera pas de faire le calcul mathématique des coefficients de la série de Fourier.
- Mais on vous demandera d'appliquer une « formule » du document « calcul des coefficients de Fourier » pour calculer un coefficient.

- Les coefficients a_n ou b_n dépendent de l'origine des temps. Or contrairement au mathématiques, vous pouvez choisir l'origine du temps.
- Vous allez choisir l'origine des temps qui vous permettra d'appliquer le plus simplement la formule du formulaire.

L'équation horaire de l'harmonique de rang n est :

$$s_n(t)=\left[a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\right] \quad .$$

Comme en électrotechnique on aime bien la fonction sinus, on préfère écrire l' équation horaire de l'harmonique de rang n :

$$s_n(t)=\hat{S}_n\sin\left(n\omega t+\psi_n\right)=S_n\sqrt{2}\sin\left(n\omega t+\psi_n\right) \quad \text{avec:}$$

pour l'amplitude de l'harmonique de rang n $\hat{S}_n=\sqrt{\left(a_n^2+b_n^2\right)}>0$, Valeur efficace harmonique

pour la valeur efficace de l'harmonique de rang n $S_n = \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}} = \frac{\hat{S}_n}{\sqrt{2}}$

pour la phase à l'origine de l'harmonique de rang n $\tan \psi_n = \frac{a_n}{b_n}$.

2.6 - Expression de la Valeur efficace en fonction des harmoniques : théorème de Parseval.

Définition de la valeur efficace : $S^2_{AC+DC} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\, dt$

On sait que $S^2_{AC+DC} = S^2_{DC} + S^2_{AC}$

Le théorème de Parseval dit que :

$$S^2_{AC+DC} = S^2_{DC} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$$

- en utilisant S_n valeur efficace de l'harmonique de rang n

$$S^2_{AC+DC} = S^2_{DC} + \sum_{n \geq 1} S_n^2 \quad \text{et} \quad S^2_{AC} = \sum_{n \geq 1} S_n^2$$

- La valeur efficace d'un signal tient compte de la valeur efficace de chacune de ses harmoniques.

Parseval

En appliquant le théorème de Parseval, on peut calculer une valeur approchée de la valeur efficace d'un signal en prenant en compte la valeur efficace de ces harmoniques significatives.

Comme nos appareils de mesure sont capables de mesurer la valeur efficace, Parseval n'est qu'une relation mathématique, que l'on n'utilise pas vraiment.

3 - Spectres d'un signal périodique.

3.1 - Représentation grahique.

spectre

Le spectre est un graphique qui permet de connaître la fréquence et l'amplitude des différents harmoniques qui composent le signal s(t).

Axe x spectre

L'abscisse du spectre est la fréquence $f_n = n \times f$ (Psim, Pspice, Regressi) ou le rang des harmoniques n .

Axe y spectre

Pour l'ordonnée on peut représenter :

- l'amplitude des harmoniques $\hat{S}_n$ (c'est le cas de Psim, Pspice ou Regressi),
- la valeur efficace des harmoniques S_n ,
- le rapport entre les amplitudes ou les valeurs efficaces d'un harmonique et celle du fondamental : $x_{\%} = \frac{S_n}{S_1} \times 100$ (analyseur de puissance).

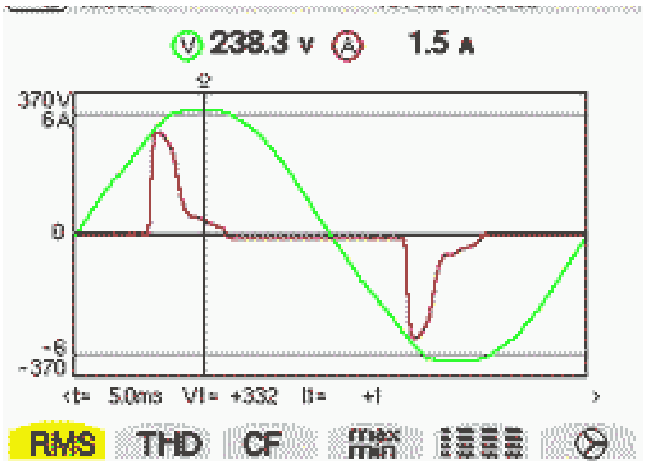


figure 5: chronogrammes tension et courant lampe fluo compacte

abscisse : temps

ordonnée : valeur instantanée en V ou A

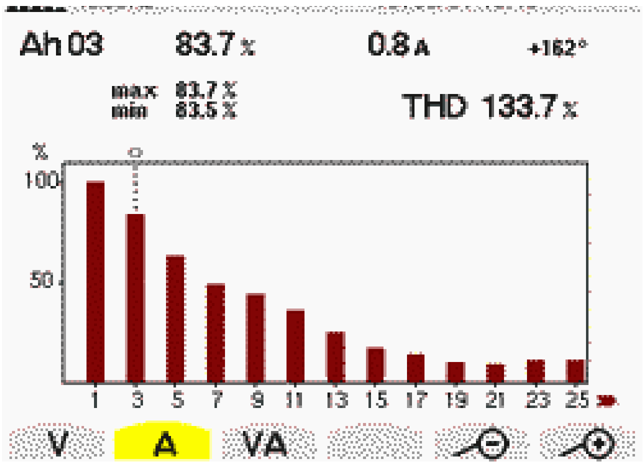


figure 6: spectre du courant de la lampe fluo compacte

abscisse : rang des harmoniques

ordonnée : % du fondamental

3.2 - Analyse d'un spectre.

Analyser spectre

L'analyse d'un spectre permet d'apporter les informations suivantes :

- le signal a t'il beaucoup d'harmoniques ?
- quel est le rang des harmoniques significatifs?
- comparer l'amplitude des harmoniques significatifs avec celui du fondamental.

Cette analyse doit permettre :

- de justifier la forme du signal
- d'identifier les harmoniques à garder / à éliminer par filtrage.

3.3 - Observation du spectre avec un appreil

FFT

Les oscilloscopes numériques, les analyseurs de réseau et des logiciels comme Regressi ont une fonction FFT (« Fast Fourier Transform » - « Transformée Rapide de Fourier »).

Mais le résultat de la FFT n'est pas forcément le spectre « théorique » : il peut y avoir des erreurs sur la fréquence ou sur l'amplitude des harmoniques car il faut certaines conditions pour que le graphique observé soit le plus proche possible du spectre :

Bien observer un spectre

- Il faut observer un nombre entier de périodes de ce signal.
- Pour avoir une bonne résolution, il faut prendre un maximum de points pour le calcul (donc augmenter la base de temps de l'oscilloscope),
- Il faut choisir une fenêtre d'interpolation (rectangle, Hanning, Hamming ..) - mais chaque fenêtre permet d'avoir une meilleure précision soit sur les fréquences des harmoniques, soit sur leurs amplitudes. Par défaut on utilise la fenêtre de type « rectangle ».

Un analyseur de puissance ou de réseau est destiné à observer des courants et des tensions de fréquence connue et fixe (50Hz Europe, 60Hz Amérique ou 400Hz Aéronautique) :

Si la fréquence du signal correspond, le spectre affiché est précis.

Spectre courant de neutre

Dans le cas du courant de neutre en triphasé (fréquence 150Hz) on en peut pas observer le spectre.

4 - Taux de distorsion harmonique.

TDH

Le taux de distorsion harmonique (TDH) mesure la quantité d'harmoniques contenus dans un signal.

Il permet de dire si un signal est sinusoïdal ou s'il contient des harmoniques.

Mais il ne permet pas de savoir la répartition des harmoniques significatifs.

C'est donc la mesure qu'on exploite avant d'analyser le spectre.

On définit les TDH suivants :

- le TDH mesuré par rapport à la valeur efficace :

$$TDH_{\%AC}=100\times\frac{\sqrt{S_{AC}^2-S_1^2}}{S_{AC}}$$

- le TDH mesuré par rapport au fondamental :

$$TDH_{\%1}=100\times\frac{\sqrt{S_{AC}^2-S_1^2}}{S_1}$$

- TDH=0% : il n'y a qu'un seul harmonique, l'ondulation est une sinusoïde pure.
- Plus le TDH sera faible, moins il y aura d'harmoniques et plus le signal sera sinusoïdal.

En électrotechnique, on considérera qu'un signal d'allure sinusoïdale et de TDH<3 % est effectivement sinusoïdal.

Remarque :

La valeur efficace de l'ondulation S_{AC} se calcule à partir de S_{DC} et S_{AC+DC} .

Si on ne peut pas calculer S_{AC} mais que l'on connaît *suffisamment* d'harmonique, alors, d'après le théorème de Parseval, on peut utiliser la relation :

$$TDH_{\%1}=100\times\frac{\sqrt{\sum_{n\geq 2} S_n^2}}{S_1}$$ - la valeur donnée sera une approximation du TDH

Exemples de TDH : Les TDH suivants sont pris par rapport au fondamental :

- Amplificateur hifi DENON PMA-2000AE (puissance 2*80W sous 8Ω) : TDH <0.01%
- Lecteur MP3 Meizu Dane-Elec : d'après la documentation TDH « très bas » : >0.1%
  - signal sinusoïdal : 0%
  - signal triangulaire : 12%
  - signal carré : 48%
- courant appelé par une alimentation d'ordinateur : >140%