Sciences Appliquées – chap 7.2

Réponse Harmonique

1 -Utilisation de la Réponse Harmonique.....2
2 -Fonction de transfert.....2
3 -Logarithmes.....3
3.1 -Fonctions Ln(x) et Log(x).....3
3.2 -Échelle logarithmique.....3
3.3 -Décibels.....4
4 -Diagramme de Bode.....4
4.1 -Gain en dB.....5
4.2 -Diagramme de phase.....5
4.3 -Diagramme de Bode asymptotique.....5
5 -Exploitation du diagramme de Bode.....6
5.1 -Type de système.....6
5.2 -Bande passante du système.....7
5.3 -Ordre du système.....8
6 -Filtrage.....9
7 -Variable de Laplace.....9
8 -Modélisation par schéma bloc.....10

1 -Utilisations de la Réponse Harmonique.

Rappels chap 9.1 « réponse indicielle ».
On cherche à *automatiser* un *système* : on veut le faire fonctionner sans la présence d'une personne humaine.
Nous nous limiterons à des systèmes comportant *une seule entrée* et *une seule sortie*.
De plus ces systèmes seront supposés *linéaires* : toute variation de la grandeur d'entrée entraînera une variation proportionnelle de la sortie.
Les systèmes que nous étudierons seront de *type « passe bas »* (« Low Pass » - LP) *d'ordre 1* ou *d'ordre 2*.

Le chapitre 9.1 nous a appris à exploiter la réponse indicielle (une des « réponses temporelles » possibles) d'un système.

La « réponse harmonique » est la réponse en fréquence de ce système.

L'exploitation de la réponse harmonique va nous permettre de modéliser le système – c'est à dire connaître les *équations* liant l'entrée et la sortie.
Ces équations sont toujours du même *type* : ce sont des *équations différentielles* ou des *fonctions de transfert*.

Avec la réponse harmonique, on va plutôt exploiter la fonction de transfert.

Cette fonction de transfert va nous permettre d'établir le *schéma bloc* du système.

Ces schémas blocs sont utiles pour la détermination des correcteurs à utiliser pour asservir le système.

La réponse harmonique est aussi le meilleur outil pour étudier le « *filtrage*».

2 -Fonction de transfert.

Pour obtenir la réponse harmonique d'un système linéaire il faut placer à l'entrée du système une sinusoïde de fréquence f variable (valeur efficace E , phase à l'origine φ_E : $\underline{E}=[E\,;\varphi_E]$).

Le système étant linéaire, la sortie est elle aussi sinusoïdale de même fréquence f : $\underline{S}=[S\,;\varphi_S]$.

Pour chaque valeur de fréquence, connaissant $\underline{E}=[E\,;\varphi_E]$, on doit mesurer ou calculer $\underline{S}=[S\,;\varphi_S]$.

On définit la fonction de transfert du système : $\underline{H}(j\omega)=\dfrac{\underline{S}}{\underline{E}}$

$\underline{H}$ est une fonction complexe dont la variable est $j\omega$.

On peut écrire $\underline{H}(j\omega)=[H\,;\varphi_H]=H_{\Re}+j\,H_{\Im}$ où:

- H est le module de $\underline{H}$ $\qquad H=\dfrac{S}{E}$

- φ_H est l'argument de $\underline{H}$ $\qquad \varphi_H = \varphi_S - \varphi_E$
- $H_{\Re}$ est la partie réelle de $\underline{H}$ $\qquad H_{\Re} = H \cos \varphi_H$
- $H_{\Im}$ est la partie imaginaire de $\underline{H}$ $\qquad H_{\Im} = H \sin \varphi_H$

La réponse harmonique d'un système donne les variations de H et φ_H en fonction de la fréquence f .

variable f							
module H							
argument φ_H							

3 -Logarithmes.

3.1 - Fonctions Ln(x) et Log(x).

Le logarithme népérien $\ln(x)$ est la fonction inverse de e^x : $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$.

Le logarithme à base 10 $\log(x)$ est la fonction inverse de 10^x : $y = 10^x \Leftrightarrow x = \log y$

On a les relations $\log(x) = \ln(x)/\ln(10)$

$\log(1) = 0$; $\log(10) = 1$; $\log(10^n) = n$

Les logarithmes transforment :

une multiplication en une addition : $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$

une division en une soustraction : $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$

$\log(a^b) = b \times \log(a)$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
log(x)	0	0.30	0.48	0.60	0.69	0.79	0.84	0.90	0.95
Valeur approchée		1/3 0+1/3	½ 0+1/2		2/3 0+2/3				

x	0,1	0,2		10	30		100	500	
log(x)	-1	-0,7 -1+1/3		1	1,48 1+1/2		2	2,69 2+2/3	

3.2 - Échelle logarithmique.

On doit représenter plusieurs décades de fréquence.

Avec une échelle linéaire (normale) les basses fréquences seraient écrasées par rapport

aux hautes fréquences :

figure 1: échelle linéaire

Avec l'échelle logarithmique, chaque décade est représentée par la même longueur :

figure 2: échelle logarithmique

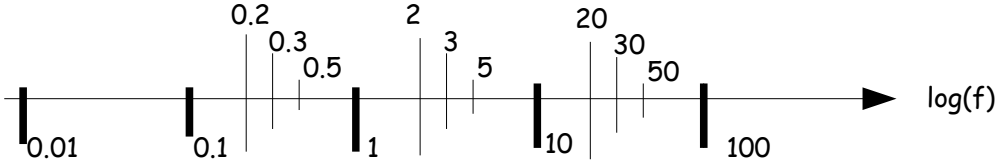
Une décade de fréquence <=> multiplier la fréquence par 10

une octave de fréquence <=> multiplier la fréquence par 2.

Sur une décade, le « 2 » est à 1/3 de la décade

le « 3 » est à 1/2 de la décade

le « 5 » est à 2/3 de la décade



3.3 - Décibels.

Le Bel (B) et le déciBel (1dB=10B) sont au départ des unités de mesure de puissance acoustique :

$X_{dB}=10\log(P/P_{ref})$ où P et P_{ref} représentent des pressions.

En acoustique, gagner 3dB, c'est multiplier la puissance sonore par 2.

perdre 3dB, c'est diviser la puissance sonore par 2.

Ordre de grandeur de puissances sonores :

50dB bruit ambiant dans une pièce	80dB seuil de douleur	100dB seuil de dangerosité	130dB décollage d'un avion à 300m de nous	180dB décollage d'une fusée

4 -Diagramme de Bode.

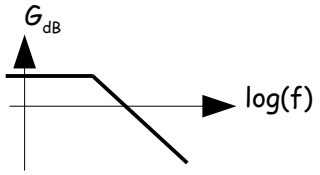
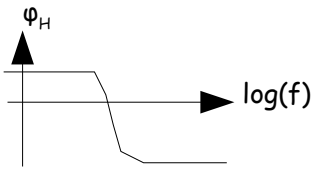
Le ***diagramme de Bode*** est la représentation graphique des résultats de la réponse harmonique (fonction de transfert $\underline{H}$, module H et argument φ_H).

On a donc 2 graphiques :

Le ***diagramme de gain*** représente les variations du ***gain en déciBel en fonction de la fréquence***.

Le ***diagramme de phase*** représente les variations de la ***phase en fonction de la fréquence***.

Pour l'axe des abscisses, on choisit une ***échelle logarithmique***.

 diagramme de gain	 diagramme de phase

4.1 - Gain en dB.

Au lieu de représenter les variations du module H en fonction de la fréquence, on préfère représenter celles du gain en dB G_{dB} :

$$G_{dB}=20\log(H) \quad <=> \quad H=10^{G/20}$$

$G>0 \Leftrightarrow H>1 \Leftrightarrow S>E$ un gain >0 veut dire que la sortie est > à l'entrée	$G<0 \Leftrightarrow H<1 \Leftrightarrow S<E$ un gain >0 veut dire que la sortie est < à l'entrée
Gagner 3dB, c'est multiplier H par $\sqrt{2}$.	Perdre 3dB, c'est diviser H par $\sqrt{2}$.
Gagner 6dB, c'est multiplier H par 2	Perdre 6dB, c'est multiplier H par 2
Gagner 20dB, c'est multiplier H par 10	Perdre 20dB, c'est diviser H par 10
$G \pm n \times 20\,dB$ <=> $H \times 10^{\pm n/20}$	

4.2 - Diagramme de phase.

La phase φ_H peut être représentée en degré ou radian.

4.3 - Diagramme de Bode asymptotique.

Une fois le diagramme de Bode tracé, on trace sur le diagramme de gain et sur le diagramme de phase les 2 asymptotes :

- lorsque $f \to 0$
- et lorsque $f \to \infty$.

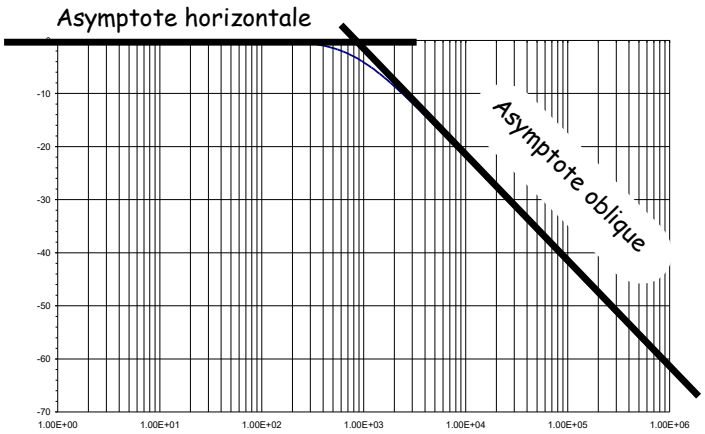


figure 3: Diagramme de Gain et asymptotes

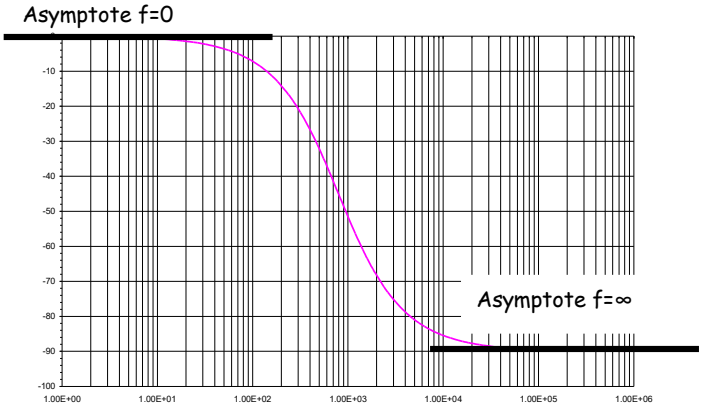


figure 4: Diagramme de phase et asymptotes

On s'aperçoit sur le diagramme de gain que la courbe du gain suit très longtemps les asymptotes – c'est à cause des échelles log.

Sur le diagramme de gain, on peut rencontrer des asymptotes horizontales ou des asymptotes obliques.
Sur une asymptote horizontale, on lit la valeur du gain en dB.
Sur une asymptote oblique, on mesure la variation de gain sur une décade. Cette variation est obligatoirement multiple de 20dB.
La pente d'une asymptote oblique au diagramme de gain est de $n \times 20\text{dB}/\textit{décade}$.

Sur le diagramme de phase, les asymptotes sont horizontales.

5 -Exploitation du diagramme de Bode.

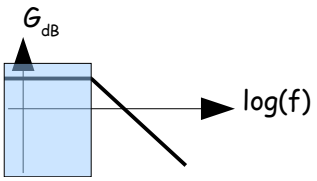
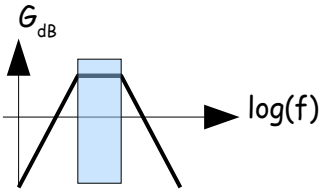
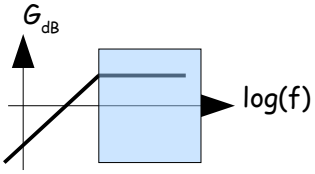
Avec le diagramme de Bode, on doit déterminer :

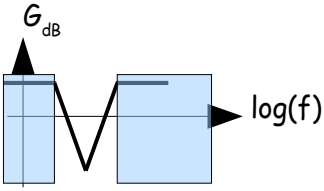
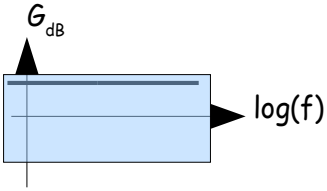
1. le type de système,
2. la bande passante,
3. l'ordre du système.

5.1 - Type de système.

Le type de système permet de connaître le type de fréquences (BF, MF, HF) que le système laisse passer et celles qu'il bloque.

Les gabarits possibles sont :

Passe Bas	Passe Bande	Passe Haut
« Low Pass » LP	« Band Pass » BP	« High Pass » HP
		

Réjecteur	Passe tout - déphaseur
« Notch »	« All Pass »
	

5.2 - Bande passante du système.

La ***bande passante*** permet de connaître les fréquences que laisse passer ou même amplifie le système.

On mesure la bande passante sur le diagramme de gain.

En général, on mesure la bande passante à -3dB .

Pour un filtre électronique perdre 3dB c'est diviser H par $\sqrt{2}$, donc diviser la puissance ($=H^2$) par 2 : perdre 3dB correspond donc à une baisse significative du niveau de la sortie.

Le gain dans la bande passante G_{BP} est le gain de l'asymptote horizontale.

Ce gain G_{BP} peut être positif : la sortie est alors > à l'entrée : le système amplifie l'entrée dans la bande passante – pour les filtres, on parle de « filtre actif ».

Les fréquences de coupures à -3dB sont les fréquences f_C pour lesquelles le système a perdu 3dB par rapport à G_{BP} :

$$G(f_C)=G_{BP}-3$$

La bande passante à -3dB est l'ensemble des fréquences de la bande passante comprises entre les fréquences de coupures f_C .

Remarques :

- La bande passante « correspond » à peu près aux fréquences où le diagramme de gain colle aux asymptotes horizontales.
- Les fréquences de coupure correspondent à peu près au croisement des asymptotes horizontales et obliques du diagramme de gain.

5.3 - Ordre du système.

L'ordre du système permet de connaître l'efficacité du système à bloquer les fréquences situées en dehors de la bande passante.

On peut mesurer l'ordre n d'un système sur son diagramme de gain ou son diagramme de phase.

Sur le diagramme de gain, on mesure la pente de l'asymptote oblique (celle qui est en dehors de la bande passante) : cette pente est obligatoirement de $\pm n \times 20\text{dB}/\textit{décade}$.

Sur le diagramme de phase, la variation totale de la phase est obligatoirement de $\pm n \times 90°$.

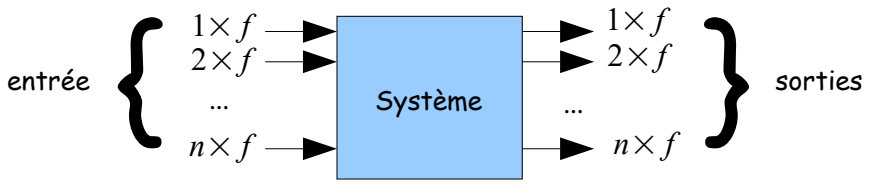
Remarques :

- Le degré n du système est « le degré » de la fonction de transfert $\underline{H}$.
- Un système d'ordre 1 a une atténuation de -20dB/décade : en dehors de la bande passante, si on multiplie la fréquence par 10, la sortie sera divisée par 10^1 .
- Un système d'ordre 2 a une atténuation de -2*20dB/décade : en dehors de la bande passante, si on multiplie la fréquence par 10, la sortie sera divisée par $10^2 = 100$.

6 -Filtrage.

Un système se comporte comme un filtre puisqu'il modifie la valeur efficace et déphase un signal sinusoïdal en fonction de sa fréquence.

Si on place en entrée du système un signal périodique (donc constitué d'une infinité d'harmoniques, donc de sinusoïdes), chaque harmonique sera filtrée séparément par le système : c'est le théorème de superposition :



L'harmonique de rang n de la sortie dépend de l'harmonique de rang n de l'entrée et de la fonction de transfert à la fréquence $n\times f$: $\underline{S}(jn\omega)=\underline{H}(jn\omega)\times\underline{E}(jn\omega)$

Donnée : fréquence ou rang n de l'harmonique	$n\times f$
Donnée : Harmonique entrée rang n	$\underline{E_n}=[E_n;\varphi_{E-n}]$
Donnée : Fonction de transfert fréquence $n\times f$	$\underline{H}(jn\omega)=[H(n\omega);\varphi_H(n\omega)]$
Calcul Harmonique de sortie rang n	$\underline{S_n}=[S_n;\varphi_{S-n}]$: $S_n=H(n\omega)\times E_n$ $\varphi_{S-n}=\varphi_H(n\omega)+\varphi_{E-n}$

7 -Variable de Laplace.

La transformée de Laplace est une opération mathématique (tout comme la transformée de Fourier).

La transformée de Laplace $F(p)$ d'une fonction $f(t)$ est : $F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt$.

« p » est la variable de Laplace.

La transformée de Laplace est un outil efficace pour résoudre « simplement » des équations différentielles.

À ce moment de votre niveau de formation, cette variable de Laplace est <u>*une façon plus simple d'écrire les fonctions de transfert*</u> « en oubliant » la notation complexe :

- on remplace la variable complexe $j\omega$ (difficile de trouver ω sur le clavier) par la lettre $p=j\omega$,

- on remplace la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega)$ (lettre majuscule et soulignée), par H(p) (lettre majuscule seulement).

Remarques :

$-\omega^2=(j\omega)^2$ devient avec Laplace p^2 .

Pour tracer le diagramme de Bode, il faut obligatoirement revenir à la notation complexe pour déterminer le module et l'argument.

Exemples :

	RC	LR	L+C//R
Complexe	$\underline{H}=\frac{1}{1+jRC\omega}$	$\underline{H}=\frac{1}{1+j\frac{L}{R}\omega}$	$\underline{H}=\frac{1}{1+j\frac{L}{R}\omega-LC\omega^2}$
Laplace	$H=\frac{1}{1+RCp}$	$H=\frac{1}{1+\frac{L}{R}p}$	$H=\frac{1}{1+\frac{L}{R}p+p^2}$

8 -Modélisation par schéma bloc.

Chaque fonction de transfert est schématisée par un schéma bloc.

Système :	pour trouver la relation entre S et E, on remonte les flèches : S(p)=H(p)×E(p)